

ESG MANAGEMENT SCHOOL

ETABLISSEMENT D'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR TECHNIQUE PRIVE RECONNU PAR
L'ETAT
DIPLOME VISÉ PAR LE MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE/ GRADE MASTER
MEMBRE DE LA CONFERENCE DES GRANDES ECOLES

CONCOURS D'ENTREE EN 1^{ère} ANNEE DE L'ESG MANAGEMENT SCHOOL

Session 2011

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 1 heure 1/2 Coefficient : 2

Vous ne traiterez au choix que 4 exercices sur les 6 proposés.



Session 2011

MATHEMATIQUES
1ère année

NOM :

PRENOM :

N° CANDIDAT :

Cadre réservé à la correction

NOTE :

OBSERVATIONS :



Epreuve de Mathématiques

Exercice 1 : Etude de fonction

On considère la fonction $f(x) = \frac{x-4}{7-x}$

- 1) Donner l'ensemble de définition de cette fonction.
- 2) Calculer la dérivée de cette fonction.
- 3) Déterminer le signe de la dérivée.
- 4) Donner le tableau de variation de cette fonction.

Exercice 2 : Etude de suite.

On considère la suite définie par la relation : $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$ avec $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$

- 1) Calculer u_2, u_3 et u_4 .
- 2) Montrer par récurrence que $u_{n+1} - u_n = 1$ pour tout n .
- 3) Quelle est la nature de la suite u_n ?
- 4) En déduire une expression de u_n

Exercice 3 : Dénombrement

Une entreprise a ses sites de productions répartis sur trois pays : A, B et C. Cette entreprise a 4 sites de production dans le pays A, 6 dans le pays B et 9 dans le pays C. On cherche à sélectionner trois sites pour y installer des centres de recherche.

- 1) De combien de façon peut-on choisir ces trois sites ?
- 2) Quelle est la probabilité que chaque dispose d'un centre de recherche ?
- 3) Quelle est la probabilité d'un seul pays dispose de tous les centres de recherche.
- 4) Quelle est la probabilité que seulement deux pays disposent de centres de recherche.

Exercice 4 : Intégrale.

On considère la fonction $f(x) = x \ln(x) - \frac{x}{\ln(x)}$

- 1) Donner l'ensemble de définition de la fonction.
- 2) Dériver cette fonction.

- 3) Donner la valeur exacte de $\int_2^5 \frac{\ln^3(x) + \ln^2(x) - \ln(x) + 1}{\ln^2(x)} dx$



Exercice 5 : Statistiques.

On considère la série de valeurs :

Valeur	2	3	4	5	6	8	9	10	20	30
Effectif	3	4	8	12	34	46	32	12	8	2

- 1) Calculer la moyenne de cette série.
- 2) Calculer la médiane de cette série.
- 3) Déterminer les quartiles de cette série.
- 4) Calculer l'écart-type de cette série.

Exercice 6 : Evolution de prix

Un prix d'une valeur initiale de 40 euros augmente de 2% par ans.

- 1) Déterminer sa valeur dans un an, dans deux ans et dans trois ans.
- 2) Quelle serait sa valeur dans n années.
- 3) Au bout de combien de temps ce prix va-t-il tripler (valeur exacte) ?



Corrigé de l'Epreuve de Mathématiques

Exercice 1 : Etude de fonction

On considère la fonction $f(x) = \frac{x-4}{7-x}$

5) Donner l'ensemble de définition de cette fonction.

L'ensemble de définition est l'ensemble des réels privé de la valeur 7.

6) Calculer la dérivée de cette fonction.

$$f'(x) = \frac{7-x-(x-4) \times (-1)}{(7-x)^2} = \frac{3}{(7-x)^2}$$

7) Déterminer le signe de la dérivée.

Le numérateur et le dénominateur de cette dérivée sont positifs. La dérivée de cette fonction est donc positive et cette fonction est croissante.

8) Donner le tableau de variation de cette fonction.

x	$-\infty$	7	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
f	↗		↗

Exercice 2 : Etude de suite.

On considère la suite définie par la relation : $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$ avec $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$

5) Calculer u_2, u_3 et u_4 .

$$u_2 = 2 \times 1 - 0 = 2$$

$$u_3 = 2 \times 2 - 1 = 3$$

$$u_4 = 2 \times 3 - 2 = 4$$

6) Montrer par récurrence que $u_{n+1} - u_n = 1$ pour tout n .

La relation est évidente pour $n=0,1,2$ et 3. Il reste à prouver le caractère héréditaire de

cette relation. Supposons que pour n donné on a $u_{n+1} - u_n = 1$. Calculons alors $u_{n+2} - u_{n+1}$.

On a $u_{n+2} - u_{n+1} = 2u_{n+1} - u_n - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n$. Or par hypothèse de récurrence $u_{n+1} - u_n = 1$ ainsi $u_{n+2} - u_{n+1} = 1$. Ainsi pour tout n on a $u_{n+1} - u_n = 1$.

7) Quelle est la nature de la suite u_n ?

La relation précédente indique que la suite u_n est une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme $u_0 = 0$.

8) En déduire une expression de u_n

On a ainsi $u_n = n$.



Exercice 3 : Dénombrement

Une entreprise a ses sites de productions répartis sur trois pays : A, B et C. Cette entreprise a 4 sites de production dans le pays A, 6 dans le pays B et 9 dans le pays C. On cherche à sélectionner trois sites pour y installer des centres de recherche.

5) De combien de façon peut-on choisir ces trois sites ?

On doit choisir ces trois sites parmi $4+6+9=19$ sites. Le choix de trois sites est un choix non ordonné. On dénombre ainsi les possibles par le nombre de combinaisons à 3 éléments dans un ensemble à 19 éléments.

$$\binom{19}{3} = \frac{19!}{3!(19-3)!} = \frac{19 \times 18 \times 17}{2 \times 3} = \frac{19 \times 3 \times 17}{1} = 969$$

6) Quelle est la probabilité que chaque dispose d'un centre de recherche ?

Il y a une façon parmi 4 de choisir un site dans le premier pays, 1 parmi 6 dans le second et une parmi 9 dans le dernier. La probabilité considérée est ainsi $P = \frac{4 \times 6 \times 9}{969} = \frac{216}{969}$

7) Quelle est la probabilité d'un seul pays dispose de tous les centres de recherche.

Pour qu'un seul pays dispose de tous les centres alors soit tous les centres sont dans le premier pays, soit dans le second soit dans le dernier. Ainsi la probabilité considérée est

$$p = \frac{\binom{4}{3} + \binom{6}{3} + \binom{9}{3}}{969} = \frac{4 + 15 + 84}{969} = \frac{103}{969}$$

8) Quelle est la probabilité que seulement deux pays disposent de centres de recherche. Cette probabilité est la probabilité complémentaire des deux précédentes. Ainsi

$$P = 1 - \frac{216 + 103}{969} = \frac{650}{969}$$

Exercice 4 : Intégrale.

On considère la fonction $f(x) = x \ln(x) - \frac{x}{\ln(x)}$

4) Donner l'ensemble de définition de la fonction.

La fonction \ln est définie sur l'ensemble des réels strictement positifs. Cette fonction s'annule pour $x=1$. L'ensemble de définition est donc $]0;1[\cup]1;+\infty[$

5) Dériver cette fonction.

$$\text{On a } f'(x) = \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - \frac{\ln(x) - x \times \frac{1}{x}}{(\ln(x))^2} = \ln(x) + 1 - \frac{\ln(x) - 1}{(\ln(x))^2} = \frac{\ln^3(x) + \ln^2(x) - \ln(x) + 1}{(\ln(x))^2}$$

6) Donner la valeur exacte de $\int_2^5 \frac{\ln^3(x) + \ln^2(x) - \ln(x) + 1}{\ln^2(x)} dx$

On reconnaît la dérivée de la fonction f sous cette intégrale. Ainsi

$$\int_2^5 \frac{\ln^3(x) + \ln^2(x) - \ln(x) + 1}{\ln^2(x)} dx = \left[x \ln(x) - \frac{x}{\ln(x)} \right]_2^5 = 5 \ln(5) - \frac{5}{\ln(5)} - 2 \ln(2) + \frac{2}{\ln(2)}$$



Exercice 5 : Statistiques.

On considère la série de valeurs :

Valeur	2	3	4	5	6	8	9	10	20	30
Effectif	3	4	8	12	34	46	32	12	8	2

5) Calculer la moyenne de cette série.

La moyenne est 8.13664596

6) Calculer la médiane de cette série.

On a 161 valeurs dans cette série. La médiane est la 81^{ième} valeur. Il s'agit de 8.

7) Déterminer les quartiles de cette série.

Le premier quartile de cette série est 6. Le dernier est 9.

8) Calculer l'écart-type de cette série.

L'écart-type est 4.1531.

Exercice 6 : Evolution de prix

Un prix d'une valeur initiale de 40 euros augmente de 2% par an.

4) Déterminer sa valeur dans un an, dans deux ans et dans trois ans.

Le prix évolue en progression géométrique de raison 2%. Ainsi dans un an,

$P_1 = 40 \times 1.02 = 40.8$, dans deux ans $P_2 = 40.8 \times 1.02 = 41.616$ et dans 3 ans,

$P_3 = 41.616 \times 1.02 = 42.44832$

5) Quelle serait sa valeur dans n années.

La valeur dans n années est $P_n = 40 \times 1.02^n$

6) Au bout de combien de temps ce prix va-t-il tripler (valeur exacte) ?

La prix va tripler lorsque $1.02^n = 3$ soit $n \ln(1.02) = \ln(3)$ soit $n = \frac{\ln(3)}{\ln(1.02)}$

