ECOLE SUPERIEURE DE GESTION

ETABLISSEMENT RECONNU PAR L'ETAT

DIPLÔME VISÉ PAR LE MINISTERE DE L'ÉDUCATION NATIONALE / GRADE MASTER

CONCOURS D'ENTREE EN 1ère ANNEE DE L'ESG

SESSION 2009

MATHEMATIQUES

Durée : 1 heure ½ ***Coefficient : 2***

Le candidat devra traiter 4 exercices parmi les 6 proposés.

ECOLE SUPERIEURE DE GESTION

CONCOURS D'ENTREE EN 1ère ANNEE DE L'ESG

SESSION 2009

MATHEMATIQUES

1ère année

NOM :

PRENOM :

N° CANDIDAT :

Cadre réservé à la correction

NOTE :

OBSERVATIONS :

Epreuve de Mathématiques

1/ Evolution d'un gain

Une entreprise produit l'année 0 une quantité de 5 000 unités d'un produit. Le prix sur le marché de ce produit est de 30 euros l'unité. Tous les ans la production de l'usine augmente de 300 unités. Cette augmentation de l'offre a pour effet de faire diminuer le prix unitaire de l'objet de 5%.

1) Exprimer en fonction de n, le prix unitaire P_n d'un produit l'année n ainsi que la quantité Q_n produite cette même année.
2) Donner le gain total G_n si tous les produits sont vendus. Représentez sur un graphe les dix premières valeurs de G_n.
3) Conclure : l'entreprise a t elle raison d'augmenter sa production ?

2 / Analyse d'un jeu

On dispose de deux urnes : La première contient trois boules rouges, deux bleus et une jaune. La seconde contient 5 boules rouges et 1 bleu. Le jeu est le suivant : on lance une pièce bien équilibrée ; si on fait pile on va vers la première urne, si on fait face on va vers la seconde urne. On tire ensuite une boule au hasard ; si elle est rouge on perd 2 euros, si elle est bleu on en gagne 3, si elle est jaune on rejoue mais sans replacer la boule jaune dans l'urne. Il n'y a pas de mise pour jouer à ce jeu.

1) Donner la loi du gain de ce jeu.
2) Donner son espérance et son écart-type. Est-il intéressant de jouer à ce jeu ?
3) Quelle valeur faudrait-il gagner dans le cas d'un tirage d'une boule bleu pour que le jeu soit intéressant ?

3/ Analyse d'une probabilité

Le matin quand il part travailler un individu descend son courrier. Parfois il oublie de le poster et le garde à la main dans le métro. Quand il a voyagé la veille avec son courrier, il voyage une fois sur cinq avec son courrier le jour même, sinon une fois sur deux. On note P_n l'évènement "'il voyage le jour n avec son courrier"' et p_n sa probabilité.

1) Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n.

On pose $u_n = p_n - \frac{5}{13}$
2) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire u_n en fonction de u_1 et de n.
3) En déduire p_n en fonction de u_1 et de n.
4) Donner la limite de p_n.

4/ Vrai ou Faux

Les assertions suivantes sont-elles fausses ou vraies ? *Une affirmation non justifiée ne sera pas prise en compte ; si vous répondez Vrai démontrez alors l'affirmation, si vous répondez faux donnez un contre exemple*

1) Si $f'(x_0) = 0$ alors f admet un extremum en x_0.
2) Une équation du second degré admet une ou deux solutions réelles.
3) Si A et B sont deux évènements incompatibles et indépendants alors $P(A) = 0$ ou $P(B) = 0$.
4) Une suite convergente est monotone à partir d'un certain rang.
5) Une suite géométrique est convergente.

5/ Coût d'une machine

Une entreprise achète une machine 30 000 euros. Elle peut la revendre au bout de t années au prix de :
$v(t) = \frac{30}{0{,}5t+1}$ où t est exprimé en années et $v(t)$ en milliers d'euros.

1) A bout de combien d'années la machine aura-t-elle perdu 50% de sa valeur d'achat ?

2) On note $D(t)$ la différence entre le prix d'achat et le prix de revente au bout de t années. Donner le sens de variation de $D(t)$.

3) Le coût moyen d'utilisation $C(t)$ est égal à $\frac{D(t)}{t}$. Donner le tableau de variation de $C(t)$; ses limites en 0 et en $+\infty$ et préciser ses asymptotes.

6/ Etude de fonctions

On considère les fonctions suivantes :
$f(x) = exp(2x + 4)$ et $g(x) = \frac{4x}{ln(x)}$

1) Donner l'ensemble de définition de ces fonctions.

2) Calculer les dérivées de ces fonctions.

3) Donner le tableau de variation de ces fonctions en précisant les limites aux bornes de l'ensemble de définition, ainsi que les asymptotes éventuelles.

4) Donner une allure graphique des courbes représentatives de ces fonctions.

CORRIGE DE L'EPREUVE DE MATHEMATIQUES

1/ **Evolution d'un gain**

Corrigé de la question 1

Corrigé : 1) On remarque que Q_n est une suite arithmétique de premier terme 5000 et de raison 300. On a donc $Q_n = 5000 + 300n$. De même P_n est une suite géométrique de premier terme 30 et de raison $0,95$. On a donc $P_n = 30 \times 0,95^n$.

Corrigé de la question 2

2) Le gain total est : $G_n = P_n \times Q_n$ donc $G_n = (5000 + 300n) \times 30 \times 0,95^n$. A l'aide d'un tableau de valeurs on représente graphiquement G_n.

Corrigé de la question 3

3) l'entreprise a raison dans un premier temps d'augmenter la production mais on constate graphiquement qu'assez vite ses gains vont ensuite diminuer.

2/ **Analyse d'un jeu**

Corrigé de la question 1

1) La méthode est de construire un arbre pour donner les valeurs suivantes : $P(G = -2) = 0,7264$ et on déduit : $P(G = 3) = 1 - 0,7264 = 0,2736$.

Corrigé de la question 2

2) On a : $E[X] = -2 \times 0,7264 + 3 \times 0,2736 = -0,6319 < 0$ Le jeu est don défavorable. $V[X] = (-2)^2 \times 0,7264 + 3^2 \times 0,2736 - (-0,6319)^2 = 4,9687$ Ainsi l'écart type est de : $2,23$.

Corrigé de la question 3

3) On a à résoudre E[X] > 0. Soit $-2 \times 0,7264 + x \times 0,2736 > 0$. Ainsi on trouve $x > 5,31$.

3/ **Analyse d'une probabilité**

Corrigé de la question 1

Corrigé : Il s'agit de la méthode des suites arithmético-géométrique.

1) On applique le théorème du système complet d'évènements avec comme choix d'évènements : P_n et $\overline{P_n}$.
On a $P(P_{n+1}) = P(P_{n+1} \cap P_n) + P(P_{n+1} \cap \overline{P_n})$
soit :$p_{n+1} = P_{P_n}(P_{n+1}) \times p_n + P_{\overline{P_n}}(P_{n+1}) \times (1 - p_n)$
d'où : $p_{n+1} = \frac{1}{5} \times p_n + \frac{1}{2} \times (1 - p_n)$
et donc $p_{n+1} = -\frac{3}{10} \times p_n + \frac{1}{2}$.

Corrigé de la question 2

2) On a : $u_{n+1} = -0,3 \times u_n$. Il s'agit d'une suite géométrique de raison $-frac310$ et de premier terme u_1.
On a donc $u_n = (0,3)^{n-1} \times u_1$.

Corrigé de la question 3

3) Ainsi $p_n = (0,3)^{n-1} \times u_1 + \frac{5}{13}$.

Corrigé de la question 4

4) On a donc $\frac{5}{13}$ comme limite de p_n.

4/ **Vrai ou Faux**

Les assertions suivantes sont-elles fausses ou vraies ? *Une affirmation non justifiée ne sera pas prise en compte ; si vous répondez Vrai démontrez alors l'affirmation, si vous répondez faux donnez un contre exemple*

1) Si $f'(x_0) = 0$ alors f admet un extremum en x_0.
Faux : Contre exemple : $f(x) = x^3$ on a $f'(0) = 0$ et pourtant pas d'extremum en 0.

2) Une équation du second degré admet une ou deux solutions réelles.
Faux : elle peut ne pas avoir de solutions réelles : exemple : $x^2 + 1 = 0$.

3) Si A et B sont deux évènements incompatibles et indépendants alors $P(A) = 0$ ou $P(B) = 0$.

Vrai : On a : $P(A \cap B) = 0$ et $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. On en déduit que $P(A) = 0$ ou $P(B) = 0$.

4) Une suite convergente est monotone à partir d'un certain rang.
Faux : contre exemple $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$

5) Une suite géométrique est convergente.
Faux : contre exemple $u_n = 2^n$

5/ **<u>Coût d'une machine</u>**

<u>Corrigé de la question 1</u>

1) On doit résoudre $v(t) = 15$ soit $v(t) = \frac{30}{0,5t+1} = 15$ d'où $0,5t + 1 = 2$ et donc $t = 2$.

<u>Corrigé de la question 2</u>

2) Le prix d'achat est fixe le prix de revente diminue avec le temps car il s'agit de l'inverse d'une fonction affine croissante. Ainsi la différence entre ces deux grandeurs augmente avec le temps et on a donc D qui est croissante.

<u>Corrigé de la question 3</u>

3) Ici il faut exprimer $C(t)$ et calculer sa dérivée.
$C(t) = \frac{D(t)}{t}$.
d'où $C(t) = \frac{30-\frac{30}{0,5t+1}}{t} = \frac{30}{t} - \frac{30}{t(0,5t+1)}$.
Ainsi on a $C'(t) = -\frac{30}{t^2} + 30\frac{0,5t+1+0,5t}{(t(0,5t+1))^2}$
d'où : $C'(t) = -\frac{30}{t^2} + 30\frac{t+1}{(t(0,5t+1))^2}$
et donc
$C'(t) = \frac{-30(0,5t+1)^2+30(t+1)}{(t(0,5t+1))^2}$
soit
$C'(t) = \frac{-30\times 0,25t^2-30t-30+30t+30}{(t(0,5t+1))^2}$
$C'(t) = \frac{-7,5t^2}{(t(0,5t+1))^2}$
et on a $C'(t) < 0$ pour $x > 0$ donc C est décroissante sur $]0;+\infty[$.
$\underbrace{lim C}_{0} = +\infty$ (asymptote verticale :x=0) et $\underbrace{lim f}_{+\infty} = 0$ (asymptote horizontale : y = 0).

6/ **Etude de fonctions**

Corrigé de la question 1

1) Une exponentielle est définie sur l'ensemble des réels ainsi $D_f = \Re$. Une fraction ne peut avoir son dénominateur qui s'annule ainsi on a : $x \neq 1$ de plus ln est définie sur $]0; +\infty[$.

Ainsi on a $D_g =]0; 1[\cup]1; +\infty[$.

Corrigé de la question 2

2) On a $f'(x) = 2exp(2x+4)$ et $g'(x) = \frac{4 \times ln(x) - 4x \times \frac{1}{x}}{(lnx)^2}$
d'où $g'(x) = 4\frac{ln(x)-1}{ln(x)^2}$

Corrigé de la question 3

3) On a $\forall x \in \Re, f'(x) > 0$ ainsi f est croissante. On a $\underbrace{limf}_{-\infty} = 0$ d'où une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ et $\underbrace{limf}_{+\infty} = +\infty$

g'(x) a le signe de $ln(x) - 1$ ainsi $g'(x)$ est négative sur $]0; e[$ et positive sur $]e; +\infty[$. Ainsi g est décroissante sur $]0; e[$ et croissante sur $]e; +\infty[$

De plus $\underbrace{limg}_{0+} = 0$; $\underbrace{limg}_{1-} = -\infty$; $\underbrace{limg}_{1+} = +\infty$ d'où une asymptote verticale d'équation $x = 1$ et $\underbrace{limg}_{+\infty} = +\infty$.