EDHEC BUSINESS SCHOOL

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur titre en première année
(AST1)

MATHEMATIQUES

12 avril 2010

Durée de l'épreuve : 2 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Exercice 1

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1+x}{x}\exp(\dfrac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

Partie 1

1) a) Montrer que f est continue à gauche en 0.
   b) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.
2) Montrer que f est dérivable à gauche en 0 et déterminer $f_g'(0)$.
3) a) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x différent de 0.
   b) Dresser le tableau de variation de f (limites comprises).

Partie 2

1) Justifier, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, l'existence d'un unique réel strictement positif, noté u_n, et vérifiant $f(u_n) = n$.

2) a) Montrer que, pour tout réel x supérieur ou égal à 1, on a : $1 + \dfrac{\ln(x)}{2} \leq \sqrt{x}$.

   b) Établir que : $\forall n \geq 2, f(\dfrac{1}{\ln(\sqrt{n})}) \leq n$.

   c) En déduire un encadrement de u_n, puis déterminer la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3) En revenant à la définition de u_n, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} n\,u_n = +\infty$.

Exercice 2

1) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Montrer, grâce à une intégration par parties, que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n}dx$ converge et donner sa valeur en fonction de n.

2) On note f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x)=0 & \text{si} \quad x<1 \\ f(x)=9\dfrac{\ln(x)}{x^4} & \text{si} \quad x\geq 1 \end{cases}$

Montrer que f est une densité de probabilité.

3) On considère une variable aléatoire réelle X, définie sur un espace probabilisé (Ω, $\mathcal{A}$, P), et admettant f comme densité.

Utiliser la première question pour montrer que X possède une espérance et une variance, notées respectivement $E(X)$ et $V(X)$, et donner leurs valeurs.

4) On pose $Y = \dfrac{1}{X}$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité, définie elle aussi sur l'espace probabilisé (Ω, $\mathcal{A}$, P). Déterminer sans chercher à connaître une densité de Y, les valeurs de $E(Y)$ et $V(Y)$.

Exercice 3

On considère deux urnes U et V contenant chacune 2 boules. Au départ, l'urne U contient 2 boules blanches et l'urne V contient 2 boules noires.

On effectue une suite de tirages dans ces urnes de la façon suivante : chaque tirage consiste à tirer au hasard une boule de chaque urne et à la mettre dans l'autre urne (il y a donc échange de 2 boules à chaque tirage).

Pour tout entier naturel n, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches que contient l'urne U avant le $(n+1)^{\text{ème}}$ tirage et on a donc $X_0 = 2$.

Pour tout entier naturel n, on pose $C_n = \begin{pmatrix} P(X_n=0) \\ P(X_n=1) \\ P(X_n=2) \end{pmatrix}$.

1) On note M la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont l'élément de la $(i+1)^{\text{ème}}$ ligne et de la $(j+1)^{\text{ème}}$ colonne, pour tout couple (i, j) de $\{0, 1, 2\} \times \{0, 1, 2\}$, est égal à $P_{(X_n=j)}(X_{n+1}=i)$.

a) Montrer que $M = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$ (on justifiera rapidement les 9 valeurs).

b) Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $C_{n+1} = MC_n$. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $C_n = M^n C_0$.

2) a) Déterminer les valeurs propres de M ainsi que les sous-espaces propres associés.

b) Établir qu'en posant $D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, il existe une matrice P inversible dont la première ligne est constituée de "1", et telle que $M = PDP^{-1}$. Expliciter la matrice P.

c) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, donner, sans la justifier, la relation liant M^n et D^n.

d) Justifier que la dernière colonne de P^{-1} est $\begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/2 \\ 1/6 \end{pmatrix}$. En déduire $P^{-1}C_0$, puis, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $D^nP^{-1}C_0$, puis M^nC_0. Donner enfin, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la loi de X_n.

3) Montrer que la suite (X_n) converge en loi vers une variable aléatoire X et donner la loi de X.

EDHEC 2010 : concours AST1

Corrigé de l'épreuve de mathématiques

(12 mars 2010)

Exercice 1..

Partie 1

1. a) On sait que $\dfrac{x+1}{x} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{x}$ donc $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x}\exp(\dfrac{1}{x}) = \lim\limits_{u\to -\infty} u\,e^u = 0$ (croissances comparées). On a donc $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$, ce qui montre que f est continue à gauche en 0.

b) On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \exp(\dfrac{1}{x}) = \lim\limits_{u\to -\infty} e^u = +\infty$, donc (sans indétermination) on a : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$.

2. $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{x+1}{x^2}\exp(\dfrac{1}{x})$ et, avec la même technique : $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{x^2}\exp(\dfrac{1}{x})$.

On a alors : $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^2}\exp(\dfrac{1}{x}) = \lim\limits_{u\to -\infty} u^2 e^u = 0$ (croissances comparées).

Conclusion : f est dérivable à gauche en 0 et $f_g{}'(0) = 0$.

3. a) La fonction f est dérivable ailleurs qu'en 0, comme composée, puis produit de fonctions dérivables sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Après calculs, on trouve :

$$\forall x \neq 0,\ f'(x) = -\frac{2x+1}{x^3}\exp(\frac{1}{x}).$$

b) En $+\infty$: $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x+1}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \exp(\dfrac{1}{x}) = \exp(0) = 1$ donc : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1$.

En $-\infty$: $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x+1}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} \exp(\dfrac{1}{x}) = \exp(0) = 1$ donc : $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 1$.

Le tableau de variation de f est donc celui-ci :

x	$-\infty$	-1		$-1/2$			0		u_n	$+\infty$
$f'(x)$			$-$	0	$+$		0	$-$		
$f(x)$	1	0		$-e^{-2}$		0	$+\infty$		n	1

Partie 2

1. Sur $]-\infty, 0[$ la fonction f prend ses valeurs dans $[-\frac{1}{e^2}, 1[$, intervalle qui ne contient pas les entiers naturels supérieurs ou égaux à 2, ce qui rend impossible l'égalité $f(u_n) = n$ pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2.
En revanche, sur $]0, +\infty[$, la fonction f est continue et strictement décroissante, elle réalise donc une bijection de $[0, +\infty[$ sur $]1, +\infty[$. Comme tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 appartient à l'intervalle image, on peut affirmer qu'il existe un unique réel strictement positif, noté u_n, et vérifiant $f(u_n) = n$.

2. a) Pour tout réel x supérieur ou égal à 1, on pose : $h(x) = 1 + \dfrac{\ln(x)}{2} - \sqrt{x}$.

La fonction h est dérivable (fonctions usuelles) et : $\forall x \geq 1,\ h'(x) = \dfrac{1-\sqrt{x}}{2x} \leq 0$.

La fonction h est donc décroissante sur $[1, +\infty[$ et, comme $h(1) = 0$, on peut conclure :
$\forall x \geq 1,\ h(x) \leq 0$.

Ceci veut bien dire que, pour tout réel x supérieur ou égal à 1, on a : $1 + \dfrac{\ln(x)}{2} \leq \sqrt{x}$.

b) Après calculs, on obtient : $\forall n \geq 2, f\left(\dfrac{1}{\ln(\sqrt{n})}\right) = \sqrt{n}\left(1+\ln\left(\sqrt{n}\right)\right) = \sqrt{n}\left(1+\dfrac{\ln(n)}{2}\right)$.

D'après la question précédente, on en déduit ($\sqrt{n} \geq 0$) : $\forall n \geq 2, f\left(\dfrac{1}{\ln(\sqrt{n})}\right) \leq \sqrt{n}\ \sqrt{n}$

On a bien : $\forall n \geq 2, f\left(\dfrac{1}{\ln(\sqrt{n})}\right) \leq n$.

c) On a : $f(u_n) \geq f\left(\dfrac{1}{\ln(\sqrt{n})}\right)$ et, par décroissance de f sur l'intervalle $]0, +\infty[$, on en déduit :

$\forall n \geq 2,\ u_n \leq \dfrac{1}{\ln(\sqrt{n})}$.

Comme, de plus, (u_n) est une suite de réels positifs, on a : $\forall n \geq 2,\ 0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{\ln(\sqrt{n})}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\ln(\sqrt{n})} = 0$, on a, par encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

3. En revenant à la définition de u_n, on a $f(u_n) = n$, ce qui s'écrit : $\dfrac{u_n+1}{u_n}\exp\left(\dfrac{1}{u_n}\right) = n$.

En multipliant des deux côtés par u_n, on trouve : $(u_n+1)\exp\left(\dfrac{1}{u_n}\right) = n\,u_n$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0^+$ (la suite (u_n) est positive et tend vers 0), alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (1 + u_n) = 1$ et, de plus $\lim\limits_{n\to+\infty} \exp\left(\dfrac{1}{u_n}\right) = +\infty$. On a effectivement : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\,u_n = +\infty$.

Exercice 2..

1. Notons tout d'abord que la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x^n}$ est continue sur $[1, +\infty[$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

Pour tout réel A supérieur ou égal à 1, on réalise une intégration par parties sur l'intégrale définie $I(A) = \int_1^A \dfrac{\ln(x)}{x^n}dx$, en posant $u(x) = \ln(x)$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x^n}$.

On a alors $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ et on peut choisir $v(x) = \dfrac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$.

Les fonctions u et v sont de classe C^1 et on peut écrire : $I(A) = \left[\dfrac{-\ln(x)}{(n-1)x^{n-1}}\right]_1^A + \dfrac{1}{n-1}\int_1^A \dfrac{1}{x^n}dx$.

On a donc : $I(A) = \dfrac{-\ln(A)}{(n-1)A^{n-1}} + \dfrac{1}{n-1}\left[\dfrac{-1}{(n-1)x^{n-1}}\right]_1^A = \dfrac{-\ln(A)}{(n-1)A^{n-1}} + \dfrac{1}{n-1}\left(\dfrac{-1}{(n-1)A^{n-1}} + \dfrac{1}{n-1}\right)$

Comme $n \geq 2$, on a : $\lim\limits_{A\to+\infty} \dfrac{1}{A^{n-1}} = 0$ et $\lim\limits_{A\to+\infty} \dfrac{\ln(A)}{A^{n-1}} = 0$ (par croissances comparées), on en déduit : $\lim\limits_{A\to+\infty} I(A) = \dfrac{1}{(n-1)^2}$. Ceci prouve que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^n}dx$ converge et vaut $\dfrac{1}{(n-1)^2}$.

2. On note f la fonction définie par :

La fonction f est positive (nulle sur $]-\infty, 1[$ et positive sur $[1, +\infty[$, puisque pour $x \geq 1$, $\ln(x) \geq 0$).

La fonction f est continue (nulle sur $]-\infty, 1[$ et quotient, dont le dénominateur ne s'annule pas, de fonctions continues sur $[1, +\infty[$).

D'après la première question, l'intégrale $\int_1^{+\infty} 9\dfrac{\ln(x)}{x^4}dx$ converge et vaut $9 \times \dfrac{1}{(4-1)^2} = 1$, ce qui signifie que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ est convergente de valeur 1.

Comme f est nulle sur $]-\infty, 1[$, l'intégrale $\int_{-\infty}^1 f(x)dx = 0$. Par la relation de Chasles, on en conclut : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

En conclusion, f est une densité de probabilité.

3. Comme f est nulle sur $]-\infty, 1[$, l'intégrale $\int_{-\infty}^1 x\,f(x)dx = 0$.

Par ailleurs, pour tout réel x supérieur ou égal à1, on a $x\,f(x) = 9\dfrac{\ln(x)}{x^3}$. Comme 3 est supérieur ou égal à 2, l'intégrale $\int_1^{+\infty} 9\dfrac{\ln(x)}{x^3}dx$ converge et vaut $9 \times \dfrac{1}{(3-1)^2} = \dfrac{9}{4}$.

La relation de Chasles permet une nouvelle fois de conclure : $\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$ converge et vaut $\frac{9}{4}$.

La variable aléatoire X possède donc une espérance : $E(X) = \frac{9}{4}$.

Pour le moment d'ordre 2, on procède de la même façon.

Comme f est nulle sur $]-\infty, 1[$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{1} x^2 f(x)\, dx = 0$.

Par ailleurs, pour tout réel x supérieur ou égal à1, on a $x^2 f(x) = 9\frac{\ln(x)}{x^2}$. Comme 2 est supérieur ou égal à 2, l'intégrale $\int_{1}^{+\infty} 9\frac{\ln(x)}{x^2} dx$ converge et vaut $9 \times \frac{1}{(2-1)^2} = 9$.

La relation de Chasles permet une nouvelle fois de conclure : $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx$ converge et vaut 9.

La variable aléatoire X possède donc un moment d'ordre 2 : $E(X^2) = 9$.

Grâce au théorème de Koenig-Huygens, on obtient : $V(X) = 9 - \frac{81}{16} = \frac{63}{16}$.

4. On utilise le théorème de transfert en considérant la fonction g définie sur $[1, +\infty[$, par : $g(x) = \frac{1}{x} f(x)$. On a $g(x) = 9\frac{\ln(x)}{x^5}$. D'après la première question, l'intégrale $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x} f(x)\, dx$ est convergente et vaut $9 \times \frac{1}{(5-1)^2} = \frac{9}{16}$. Toujours par nullité de l'intégrale $\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{x} f(x)\, dx$, la relation de Chasles assure que Y possède une espérance qui est : $E(Y) = \frac{9}{16}$.

Par un calcul analogue, on a $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2} f(x)\, dx = 9 \times \frac{1}{(6-1)^2} = \frac{9}{25}$.

Toujours par nullité de l'intégrale $\int_{-\infty}^{1} \frac{1}{x^2} f(x)\, dx$, la relation de Chasles assure que Y possède un moment d'ordre 2 qui vaut : $E(Y^2) = \frac{9}{25}$.

On en conclut : $V(Y) = \frac{9}{25} - (\frac{9}{16})^2 = \frac{9}{25} - \frac{81}{256} = \frac{279}{6400}$.

Exercice 3..

1. a) • S'il y a deux boules blanches dans l'urne U avant le $(n+1)^{\text{ème}}$ tirage, il est certain que l'on aura une boule blanche dans U au coup suivant (une boule blanche sera transférée de V) donc :

$$P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1) = 1,\ P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=0) = P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=2) = 0.$$

• S'il y a zéro boule blanche dans l'urne U avant le $(n+1)^{\text{ème}}$ tirage, il est, ici aussi, certain que l'on aura une boule blanche au coup suivant, donc :

$$P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1) = 1,\ P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=0) = P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=2) = 0.$$

• Enfin, s'il y a une boule blanche dans l'urne U avant le $(n+1)^{\text{ème}}$ tirage, alors :
pour qu'il y en ait zéro au coup suivant, il faut piocher cette boule (une chance sur deux) et l'échanger contre une boule noire de V (une chance sur deux). Les tirages des boules étant physiquement indépendants, les résultats de ces tirages le sont aussi et on a :

$$P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=0) = \frac{1}{4}.$$

pour qu'il y en ait une au coup suivant, il faut piocher cette boule (une chance sur deux) et l'échanger contre une boule blanche de V (une chance sur deux) ou bien piocher la boule noire de U (une chance sur deux)et l'échanger contre une boule noire de V (une chance sur deux) et on a :

$$P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=0) = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$$

pour qu'il y en ait deux au coup suivant, il faut piocher la boule noire de U (une chance sur deux) et l'échanger contre une boule blanche de V (une chance sur deux) et on a :

$$P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=0) = \frac{1}{4}.$$

En regroupant, comme l'indique l'énoncé, sous forme de tableau matriciel, on a bien :

$$M=\begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) En écrivant la formule des probabilités totales associée au système complet d'événements $\{\ (X_n = 0), (X_n = 1), (X_n = 2)\ \}$, on obtient : $P(X_{n+1} = 0) = \sum_{i=0}^{2} P_{(X_n=i)}(X_{n+1}=0)P(X_n=i)$.

En remplaçant par les valeurs trouvées à la question 1a) ,ceci s'écrit :

$P(X_{n+1} = 0) = 0\ P(X_n = 0) + \frac{1}{4} P(X_n = 1) + 0\ P(X_n = 2)$.

De la même façon, on a aussi :

$P(X_{n+1} = 0) = 1\ P(X_n = 0) + \frac{1}{2} P(X_n = 1) + 1\ P(X_n = 2)$.

$P(X_{n+1} = 0) = 0\ P(X_n = 0) + \frac{1}{4} P(X_n = 1) + 0\ P(X_n = 2)$.

En écrivant matriciellement les trois égalités précédentes, on a bien : $\forall n \in \mathbb{N}$, $C_{n+1} = MC_n$.

Par récurrence.

- $M^0 C_0 = I C_0 = C_0$.
- Si l'on suppose pour un entier naturel n que $C_n = M^n C_0$, alors $C_{n+1} = M C_n = M M^n C_0 = M^{n+1} C_0$.
- On a bien montré que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $C_n = M^n C_0$.

2. a) Par la méthode du pivot de Gauss, on obtient une réduite de la matrice $M-\lambda I$ qui est :

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}-\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda^2+\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{4} & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda^2-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{2}) \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de M sont les réels λ qui rendent cette matrice non inversible et ce sont :

$\lambda_1 = -\frac{1}{2}$, $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 = 1$.

• Le système $MX = \lambda_1 X$, avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ équivaut à $\begin{cases} x+y+z=0 \\ y=-2z \\ 0z=0 \end{cases}$, soit $\begin{cases} x=z \\ y=-2z \end{cases}$. On a donc :

$X = \begin{pmatrix} z \\ -2z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Le sous-espace propre associé à la valeur propre $-\dfrac{1}{2}$ est $E_{-\frac{1}{2}} = \text{vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix})$.

• Le système $MX = \lambda_2 X$, avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ équivaut à $\begin{cases} 2x+y+2z=0 \\ y=0 \\ 0z=0 \end{cases}$, soit $\begin{cases} z=-x \\ y=0 \end{cases}$. On a donc :

$X = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 est $E_0 = \text{vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix})$.

• Le système $MX = \lambda_3 X$, avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ équivaut à $\begin{cases} 2x-y+2z=0 \\ y=4z \\ 0z=0 \end{cases}$, soit $\begin{cases} x=z \\ y=4z \end{cases}$. On a donc :

$X = \begin{pmatrix} z \\ 4z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est $E_1 = \text{vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix})$.

b) La matrice M est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui possède trois valeurs propres distinctes deux à deux, elle est donc diagonalisable (condition suffisante). Ainsi il existe une matrice D diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de M et une matrice P inversible dont les colonnes sont les vecteurs de base des sous-espaces propres de M, telles que $M = PDP^{-1}$.

On peut choisir par exemple $D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $M^n = PD^nP^{-1}$.

d) Si l'on note K la colonne $\begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/2 \\ 1/6 \end{pmatrix}$ donnée par l 'énoncé, on a :

$$PK = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/2 \\ 1/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3-1/2+1/6 \\ -2/3+4/6 \\ 1/3+1/2+1/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$. Cette colonne étant la dernière colonne de la matrice I, ceci confirme que la dernière colonne de P^{-1} est bien $\begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/2 \\ 1/6 \end{pmatrix}$.

Comme X_0 est la variable aléatoire certaine égale à 2, on a $C_0 = \begin{pmatrix} P(X_0 = 0) \\ P(X_0 = 1) \\ P(X_0 = 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$P^{-1}C_0 = \begin{pmatrix} \times & \times & 1/3 \\ \times & \times & -1/2 \\ \times & \times & 1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/2 \\ 1/6 \end{pmatrix}$$

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $D^nP^{-1}C_0 = \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/2 \\ 1/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 0 \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

Pour finir, $M^n C_0 = PD^nP^{-1}C_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 0 \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

La loi de X_n est donc donnée par :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(X_n = 0) = P(X_n = 2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$, $P(X_n = 1) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

3. Comme $-\frac{1}{2} \in]-1, 1[$, alors $\lim_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

On peut donc conclure que la suite (X_n) converge en loi vers une variable aléatoire X dont la loi est donnée par : $P(X = 0) = P(X = 2) = \frac{1}{6}$ et $P(X = 1) = \frac{2}{3}$.

Concours **EDHEC** **12 Avril 2010**
Admission sur Titres 1ère année

RAPPORT DE CORRECTION

MATHEMATIQUES

Présentation de l'épreuve :
• L'épreuve comportait trois exercices ce qui permettait de juger les candidats sur la totalité du programme de l’épreuve. Les correcteurs ont trouvé le sujet abordable, adapté et sélectif. Ils constatent cette année qu’un plus grand nombre de candidats soient mieux préparés en probabilités (la formule des probabilités totales semble connue et maîtrisée par de nombreux candidats).

• L'exercice 1 proposait l’étude de la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{1+x}{x}\exp(\dfrac{1}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

• L'exercice 2, portant sur le programme de probabilités, proposait l’étude d’une variable à densité X, puis du calcul de l’espérance et de la variance de la variable 1/X par transfert.

• L'exercice 3 portant à la fois sur le programme d’algèbre et sur le programme de probabilités se fixait pour but l’étude d’une suite (X_n) de variables aléatoires discrètes (chaîne de Markov), puis de sa convergence en loi.

Moyenne :
Pour les 726 candidats ayant composé, la moyenne obtenue à cette épreuve est de 10,75 sur 20.

Analyse des copies :
Les correcteurs constatent une fois encore que le niveau est très hétérogène, ceci étant, bien sûr, dû aux origines scolaires et universitaires diverses des candidats. La moyenne, bien meilleure que celle de l’année dernière, malgré un nombre plus élevé de candidats, semble montrer que ceux qui se présentent connaissent les difficultés, mais aussi l’enjeu d’un tel concours.
Cette année encore, les candidats semblent avoir quelques problèmes à régler avec certains concepts d’analyse (calcul de limites par exemples). En revanche, les probabilités et l’algèbre ont été abordées avec plus de bonheur que par le passé.

Conclusion :
Le niveau global des candidats est, dans l’ensemble, correct et il semble que le nombre des candidats très faibles soit cette année, en forte diminution, ce qui est bon signe pour les années à venir.
La présentation est, pour la plupart des copies, soignée et honnête et les candidats rédigent proprement, à quelques rares exceptions près.
Nous conseillons comme d’habitude aux futurs candidats de se préparer d’une façon plus complète, en essayant de ne négliger aucun des points du programme.