EDHEC – concours AST 1 2006

Exercice 1

On définit les matrices A et D par $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. Dans tout l'exercice, B et C désignent des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.

1. a. Montrer que si $B^2 = D$ alors B commute avec D, autrement dit $BD = DB$.
   b. Montrer que si B commute avec D alors B est diagonale.
   c. Déterminer toutes les matrices B telles que $B^2 = D$.
2. a. Montrer qu'il existe une matrice inversible P telle que $A = PDP^{-1}$.
   On ne demande pas de déterminer une telle matrice P, que l'on suppose désormais fixée.
   b. Montrer que $C^2 = A$ si et seulement si la matrice B définie par $B = P^{-1}CP$ vérifie $B^2 = D$.
   c. Donner le nombre de matrices C telles que $C^2 = A$.
   On ne demande pas de déterminer ces matrices.

Exercice 2

Si Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, on donne les valeurs approchées suivantes : $\Phi(1{,}96) \cong 0{,}975$ *et* $\Phi(0{,}90) \cong 0{,}816$.

1. a. Montrer que pour tout entier $k \geq 3$, l'intégrale $A_k = \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^k}\, dt$ est convergente.
   b. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $A_k = \frac{1}{(k-1)^2}$.
2. a. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \frac{16 \ln t}{t^5}$ si $t > 1$, $f(t) = 0$ si $t \leq 1$, définit une densité de variable aléatoire X.
   b. Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance, et la calculer.
   c. Montrer que la variable aléatoire X admet une variance, et la calculer.
3. On considère une suite (X_n) de variables aléatoires indépendantes suivant la loi définie par la densité f définie au 2° a. Pour tout entier $n \geq 1$, on définit la variable aléatoire Y_n par $Y_n = \frac{X_1 + ... + X_n}{n}$.
   a. Quelle est la limite de la suite de variables aléatoires (Y_n) quand n tend vers $+\infty$?
   b. Calculer une valeur approchée de la probabilité de l'évènement $\left(\left| Y_{68} - \frac{16}{9} \right| \leq 0{,}1 \right)$.
   c. Évaluer un entier n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$ on ait $P\left(\left| Y_n - \frac{16}{9} \right| \leq 0{,}1 \right) \geq 0{,}95$.

Exercice 3

Soit $f(x, y) = x^4 y^2 (1 - x - y)^3$. On cherche à déterminer le maximum M de l'ensemble des valeurs prises par $f(x, y)$ dans le triangle T de $\mathbb{R}^2$ défini par les inégalités : $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 1$.

1. a. Montrer que f est bornée sur T.
   On admettra que ceci implique l'existence de M.
   b. Montrer que M est strictement positif.
2. a. Montrer que M est atteint en un point (x, y) de T pour lequel : $x > 0$, $y > 0$, $x + y < 1$.
   b. Montrer que $M = f\left(\frac{4}{9}, \frac{2}{9} \right)$.
3. Déterminer le maximum de la fonction $g(x, y, z) = x^4 y^2 z^3$ sous les contraintes :

$$x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x + y + z = 1.$$

EDHEC – concours AST 1 2006
Corrigé de l'épreuve de mathématiques

Exercice 1

1. a. Si $B^2 = D$ alors B commute avec D, autrement dit $BD = BB^2 = B^3 = B^2B = DB$.

b. Notons $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & b_5 & b_6 \\ b_7 & b_8 & b_9 \end{pmatrix}$: alors si on calcule BD et DB et que l'on identifie les coefficients de ces deux matrices, on obtient le système suivant de 9 équations à 9 inconnues :

$$b_1 = b_1 \,,\ 4b_2 = b_2 \,,\ 9b_3 = b_3 \,,\ b_4 = 4b_4 \,,\ 4b_5 = 4b_5 \,,\ 9b_6 = 4b_6 \,,\ b_7 = 9b_7 \,,\ 4b_8 = 9b_8 \,,\ 9b_9 = 9b_9 \,,$$

qui équivaut à $b_2 = 0$, $b_3 = 0$, $b_4 = 0$, $b_6 = 0$, $b_7 = 0$, $b_8 = 0$: donc $BD = DB$ si et seulement si B est de la forme $B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_5 & 0 \\ 0 & 0 & b_9 \end{pmatrix}$, autrement dit si et seulement si B est diagonale.

c. Si $B^2 = D$ alors B commute avec D vu le 1° a, donc B est diagonale vu le 1° b. Si on conserve les notations ci-dessus, il est alors clair que l'on a : $B^2 = \begin{pmatrix} b_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & b_5^2 & 0 \\ 0 & 0 & b_9^2 \end{pmatrix}$, donc $B^2 = D$ équivaut au système suivant de 3 équations : $b_1^2 = 1$, $b_5^2 = 4$, $b_9^2 = 9$, dont les solutions sont respectivement :
$b_1 = 1$ ou $b_1 = -1$, $b_4 = 2$ ou $b_1 = -2$, $b_9 = 3$ ou $b_1 = -3$. Les matrices B telles que $B^2 = D$ sont donc :

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

$$B_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B_6 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, B_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, B_8 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

2. a. Montrons d'abord que A admet les trois valeurs propres distinctes 1, 4, 9.

Première méthode. On a : $A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 7 \end{pmatrix}$, $A - 4I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$, $A - 9I_3 = \begin{pmatrix} -7 & 3 & 2 \\ 1 & -5 & 0 \\ 2 & 6 & -1 \end{pmatrix}$,

où I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3. Or la première de ces matrices a les deux premières colonnes proportionnelles, la deuxième a ses deux dernières colonnes proportionnelles et si C_1 , C_2 et C_3 sont les colonnes de la troisième, on a $5C_1 + C_2 + 16C_3 = O$ (colonne nulle). Donc ces trois matrices ne sont pas inversibles. De ce fait, A admet les trois valeurs propres distinctes 1, 4, 9. (La troisième de ces valeurs propres peut aussi être déduite des deux premières en utilisant la trace de A.)

Deuxième méthode. Le polynôme caractéristique de A est $\det(\lambda I_3 - A) = \lambda^3 - 14\lambda^2 + 49\lambda - 36$, qui se factorise aisément sous la forme $(\lambda - 1)(\lambda - 4)(\lambda - 9)$: ses racines, qui sont les valeurs propres de A, sont donc 1, 4 et 9.

Fin de la démonstration du 2° a. La matrice A étant carrée d'ordre 3 et admettant trois valeurs propres réelles distinctes, elle est diagonalisable dans l'algèbre des matrices réelles carrées d'ordre 3, autrement dit elle est semblable à une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont ses valeurs propres, donc elle est semblable à D. Cela signifie bien qu'il existe une matrice inversible P telle que $A = PDP^{-1}$.

b. Remarquons d'abord que $B = P^{-1}CP$ équivaut à $C = PBP^{-1}$, et que $A = PDP^{-1}$ équivaut à $D = P^{-1}AP$.

Si $C^2 = A$, alors en remplaçant C et A par leurs expressions ci-dessus on obtient $PBP^{-1}PBP^{-1} = PDP^{-1}$, autrement dit $PB^2P^{-1} = PDP^{-1}$, et en multipliant les deux membres par P^{-1} à gauche et par P à droite, on en déduit $B^2 = D$.

Réciproquement, si $B^2 = D$, en remplaçant B et D par leurs expressions ci-dessus on obtient $P^{-1}CPP^{-1}CP = P^{-1}AP$, autrement dit $P^{-1}C^2P = P^{-1}AP$, et en multipliant les deux membres par P à gauche et par P^{-1} à droite, on en déduit $C^2 = A$.

c. Il en résulte que la matrice C vérifie $C^2 = A$ si et seulement si $B = P^{-1}CP$ est telle que $B^2 = D$: or les matrices qui vérifient cette équation sont les matrices B_1 , ..., B_8 décrites au 1° c. Donc les matrices qui vérifient $C^2 = A$ sont les matrices $C_1 = PB_1P^{-1}$, ..., $C_8 = PB_8P^{-1}$. Ces matrices sont deux à deux distinctes car l'application u qui à une matrice M associe la matrice PMP^{-1} est linéaire et injective de l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à éléments réels dans lui-même. En effet la linéarité de u est aisée à vérifier, et si M appartient au noyau de u alors $PMP^{-1} = O_3$ (matrice carrée d'ordre 3 nulle), et en multipliant les deux membres par P à gauche et par P^{-1} à droite, on en déduit que $M = O_3$. Le noyau de u est donc réduit à $\{O_3\}$, donc u est bien injective. En conclusion, il existe exactement 8 matrices C carrées d'ordre 3 à éléments réels telles que $C^2 = A$.

Exercice 2

1. a. Soit $k \geq 3$ un entier fixé, et soit $g_k(t) = \dfrac{\ln t}{t^k}$: alors g_k est définie et continue sur $[1, +\infty[$, à valeurs réelles positives ou nulles ; de plus pour tout $t \in [1, +\infty[$, on a $\ln t \leq t$, donc $g(t) \leq \dfrac{1}{t^{k-1}}$: or l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{k-1}}\, dt$ est convergente car $k - 1 > 1$, donc l'intégrale $A_k = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^k}\, dt$ est convergente. On peut aussi utiliser le fait que la fonction g_k est négligeable devant $\dfrac{1}{t^{k-1}}$ quand t tend vers $+\infty$, ce qui résulte du fait que $\ln t$ est négligeable devant t quand t tend vers $+\infty$.

b. Pour $x > 1$, effectuons une intégration par parties dans l'intégrale $A_k(x) = \displaystyle\int_1^{x} \frac{\ln t}{t^k}\, dt$. On pose : $u(t) = \ln t$ donc $u'(t) = \dfrac{1}{t}$, $v'(t) = \dfrac{1}{t^k}$ dont une primitive est $v(t) = -\dfrac{1}{(k-1)t^{k-1}}$. On peut donc écrire :

$$A_k(x) = \left[-\frac{\ln t}{(k-1)t^{k-1}}\right]_1^x + \frac{1}{k-1}\int_1^x \frac{1}{t^k}\, dt = -\frac{\ln x}{(k-1)x^{k-1}} + \frac{1}{k-1}\left[-\frac{1}{(k-1)t^{k-1}}\right]_1^x$$

$$= -\frac{\ln x}{(k-1)x^{k-1}} - \frac{1}{(k-1)^2 x^{k-1}} + \frac{1}{(k-1)^2}.$$

Donc la limite de $A_k(x)$ quand x tend vers $+\infty$ est égale à $\dfrac{1}{(k-1)^2}$, autrement dit $A_k = \dfrac{1}{(k-1)^2}$.

2. a. f est définie, continue et positive ou nulle sur $\mathbb{R}$, et vu le 1° b, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_1^{+\infty} \frac{16\ln t}{t^5}\, dt$ est convergente et vaut 1 : donc f définit une densité de variable aléatoire X.

b. Vu le 1° b, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt = \int_1^{+\infty} \frac{16\ln t}{t^4}\, dt$ est convergente et vaut $\dfrac{16}{9}$: donc la variable aléatoire X admet une espérance, et celle-ci vaut $\dfrac{16}{9}$.

c. Vu le 1° b, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt = \int_1^{+\infty} \frac{16 \ln t}{t^3} dt$ est convergente et vaut 4 : donc la variable aléatoire Y = X^2 admet une espérance, et celle-ci vaut 4. On en déduit que la variable aléatoire X admet une variance, et d'après la formule de Huyghens, celle-ci est égale à $4 - \left(\frac{16}{9}\right)^2 = \frac{68}{81}$.

3. a. Quand n tend vers $+\infty$, la suite de variables aléatoires (Y_n) converge en probabilité vers une variable aléatoire Y qui suit la loi constante égale à $\frac{16}{9}$, en raison de la loi faible des grands nombres.

b. D'après le théorème de la limite centrée, la suite de variables aléatoires (Z_n) définies par $Z_n = \frac{Y_n - (16/9)}{\sqrt{68/81n}}$ converge en loi vers une variable aléatoire U qui suit la loi normale centrée réduite. Pour $n \geq 30$, on considère que la loi de Z_n est peu différente de la loi de U : on en déduit :

$$P\left(\left|Y_{68} - \frac{16}{9}\right| \leq 0{,}1\right) = P\left(\left|\frac{Y_{68} - (16/9)}{\sqrt{68/(81 \times 68)}}\right| \leq \frac{0{,}1}{\sqrt{68/(81 \times 68)}}\right) \cong P(|U| \leq 0{,}9) = 2\Phi(0{,}9) - 1 \cong 0{,}632.$$

c. Par le même raisonnement, on peut écrire pour tout $n \geq 30$:

$$P\left(\left|Y_n - \frac{16}{9}\right| \leq 0{,}1\right) = P\left(\left|\frac{Y_n - (16/9)}{\sqrt{68/81n}}\right| \leq \frac{0{,}1}{\sqrt{68/81n}}\right) \cong P\left(\left|Y_n - \frac{16}{9}\right| \leq 0{,}1\right) = P\left(|U| \leq \frac{0{,}1}{\sqrt{68/81n}}\right) \cong 2\Phi\left(\frac{0{,}1}{\sqrt{68/81n}}\right) - 1$$

donc $P\left(\left|Y_n - \frac{16}{9}\right| \leq 0{,}1\right) \geq 0{,}95$ équivaut à $\Phi\left(\frac{0{,}1}{\sqrt{68/81n}}\right) \geq 0{,}975$, donc à $\frac{0{,}1}{\sqrt{68/81n}} \geq 1{,}96$, ce qui se résout en écrivant que $n \geq \frac{68 \times 1{,}96^2}{81 \times 0{,}01} \cong 322{,}5$: donc $n_0 = 323$ convient.

Exercice 3

1. a. Pour tout $(x, y) \in T$ on a $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ et $0 \leq 1 - x - y \leq 1$ donc $0 \leq f(x, y) \leq 1$. Donc f est bornée sur T.

b. On a par exemple $f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3^9} > 0$, et par définition de M on a $f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \leq M$ donc M est strictement positif.

2. a. M est le maximum de f sur T, donc M est atteint en un point de T par définition du maximum d'une fonction. En outre M est strictement positif, alors que $f(x, y) = 0$ si on a $x = 0$ ou $y = 0$ ou $x + y = 1$: donc M est nécessairement atteint en un point (x, y) de T où aucune de ces trois conditions n'est vérifiée, autrement dit en un point (x, y) de T pour lequel : $x > 0$, $y > 0$, $x + y < 1$.

b. Comme M est atteint à l'intérieur de T, il l'est en un point critique de f. Or on cherche les points critiques de f en résolvant le système $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$: on obtient le système :

$4x^3y^2(1 - x - y)^3 - 3x^4y^2(1 - x - y)^2 = 0$, $2x^4y(1 - x - y)^3 - 3x^4y^2(1 - x - y)^2 = 0$

qui équivaut au système : $4 - 7x - 4y = 0$, $2 - 2x - 5y = 0$ dont l'unique solution est $x = \frac{4}{9}$, $y = \frac{2}{9}$.

Il résulte de ce qui précède que $M = f\left(\frac{4}{9}, \frac{2}{9}\right)$.

3. Chercher le maximum de la fonction $g(x, y, z) = x^4y^2z^3$ sous les contraintes $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, $x + y + z = 1$ revient à chercher le maximum de $f(x, y)$ sur T car la contrainte équivaut à $z = 1 - x - y$: on déduit des calculs précédents que ce maximum est égal à $M = f\left(\frac{4}{9}, \frac{2}{9}\right) = \frac{2^{10}}{3^{15}} \cong 0{,}000071$.

______